Dimension essentielle
e cohomologie prismatique

1. DIMENSION ESSENTIELLE
2. COHOMOLOGIE PRISMATIQUE
3. ORGANISATION.

1 DIMENSION ESSENTIELLE.

- QUESTION:

$$n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

$$f(x) = x^n + s_{n-1} x^{n-1} + \dots + s_1 x + s_0$$

$$\cap$$

$$\mathbb{C}(s_0, \dots, s_{n-1})(x)$$

COMBIEN D'ÉLÉMENTS TRASCENDANTS SUR $\mathbb{C}$ ON A BESOIN POUR DÉFINIR $f(x)$?

$ed(n)$

EX $\cdot$ $n = 2$ $\quad x^2 + s_1 x + s_0$

$$\left(x + \frac{s_1}{2}\right)^2 - \frac{s_1^2 - 4s_0}{4}$$

$(x')^2 - s_2$ $\quad$ ...

$ed(2) = 1$

$$\left(\frac{s_0^3}{s_1^3}\right)\left(x^3 + \frac{s_1^3}{s_0^2} x + \frac{s_1^3}{s_0^2}\right)$$

$$x = \frac{s_0}{s_1} x'$$

• $\mathrm{ed}(3) = 1$ • $\mathrm{ed}(4) = 2$ $\quad x^3 + a_1 x + a_0$

• $\mathrm{ed}(5) = 2$ (KLEIN ≥ 2 (1884)
HERMITE ≤ 2 (1861))

• $\mathrm{ed}(6) \leq 3$ (JOUBERT (1867))

• $\mathrm{ed}(n) \geq \left[\frac{n}{2}\right]$ (BUHLER
• REICHSTEIN 1995)

13th HILBERT PROBLEM

VERSION GÉOMÉTRIQUE

• $h : Y \to X$ MORPHISME FINI DE VARIÉTÉS LISSES SUR $\mathbb{C}$

$$\mathrm{ed}(Y \to X) = \min \left\{ d \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \bullet\, U \subseteq X \\ \bullet\, U \to Z \\ \quad \dim(Z) = d \\ \bullet\, W \to Z \text{ FINI} \\ \text{TEL QUE } \begin{tikzcd} W \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\square"] & Y_U \arrow[l] \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \\ Z & U \arrow[l] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & X \end{tikzcd} \end{array} \right\}$$

$$\begin{tikzcd} Y_Z \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y_U \arrow[l] \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & Y \arrow[d] \\ Z & U \arrow[l] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & X \end{tikzcd}$$

$ed(Y \to X) \leq \dim(X)$.

DEF h EST INCOMPRESSIBLE SI $ed(Y \to X) =$ kd(

Ex • $Y = \{ x^n + \sum a_i x^i = 0 \} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$

$a_0, \dots, a_{n-1}, x$

$\downarrow$

$ed(Y \to X) = ed(n)$ $\quad X = \mathbb{A}^n$

$a_0 \dots a_{n-1}$

• $A_g = \{$ ESPACE DES MODULES DE: VAR AB. DE DIM (g) PRINC. POLARISÉES $\}$

$$A^1_{g,n} = \{ \text{''} + x \in A(\mathbb{C})[n] \}$$

$A^1_{g,n} \to A_g$ FINI

KISIN, FARB, WOLFSON (2019):

$A^1_{g,n} \to A_g$ EST INCOMPRESSIBLE

{TECHNIQUES DE REDUCTION MODULO p} — QUESTION DE KLEIN (1975)

- A VAR ABÉLIENNE

$A \xrightarrow{m} A$ MULTIPLICATION PAR m.

<u>CONJECTURE</u> (BROSNAN) $\forall p$ PREMIER

$A \xrightarrow{p} A$ EST INCOMPRESSIBLE.

<u>OK</u> SI
- $\dim(A) = 1$
- $\dim(A) = 2$

FAKHRUDDIN ET SAINI
- A VERY GENERAL
- $\dim(A) \leq 3$ POUR UN ENSEMBLE DE DENSITÉ POSITIVE

$\boxed{\text{AUCUN POUR } E\times E\times E \to \exists\ E\times E\times E}$

THM 1 $Y \to X$ GALOIS WITH GROUP $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^n$, X MAXIMALE (n), PROPRE, $p \gg 0$

$$ed(Y \to X) \geq \min\left[\dim(X),\ \dim\left(H^0(X, \Omega^1)\right)\right]$$

COR $A \xrightarrow{p} A$ EST INCOMPRESSIBLE $p \gg 0$

$\boxed{2}$ COHOMOLOGIE ENSMANQUE.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[d, "G \circlearrowleft"'] & Y_U \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\square^{G\text{-eq}}"] & Y \arrow[l] \arrow[d, "G = \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^n"] \arrow[dl, phantom, "\circ"] \\
Z & U \arrow[l] \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

$\dim(Z) = i$ AFFINE

$$\begin{tikzcd}
H^i(G, \mathbb{F}_p) \arrow[r, "T"] \arrow[dr] & H^i(X, \mathbb{F}_p) \arrow[r] & H^i(U, \mathbb{F}_p) \\
& H^i(Z, \mathbb{F}_p) \arrow[ur] \arrow[r] & H^i(W)
\end{tikzcd}$$

$H^i(Z, \mathbb{F}_p) = 0$

$i > \dim(Z)$

Donc si $H^i(G, \mathbb{F}_p)$ est gros

$(H^i(G, \mathbb{F}_p) \twoheadrightarrow H^i(X, \mathbb{F}_p))$

l'image de $H^i(X, \mathbb{F}_p) \to H^i(U, \mathbb{F}_p)$

est 0 $i < ed(Y \to X)$

<u>THM 2</u> X propre. $p \gg 0$ $\forall U \subseteq X$

l'image de $H^i(X, \mathbb{F}_p) \to H^i(U)$

a dimension $\geq \dim(H^0(X, \Omega^i))$

<u>RMK</u> La variante rationnelle

$H^i(X, \mathbb{Q}) \to H^i(U, \mathbb{Q})$

est une conséquence de la théorie de Hodge.

$$\left(H^q(X,\Omega^i) \hookrightarrow H^q(U,\Omega^i) \right)$$

$$\underset{\cup}{H^n(X,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{C}} \cong \underset{\cup}{H^n_{DR}(X)}$$

ON A DONC BESOINS D'UNE THÉORIE DE HODGE ENTIÈRE..

// P-ADIQUE ENTIÈRE

PARCEQUE

<u>THM 2</u> (VRAI)

SUPPOSONS QUE IL $\exists$ UNE VARIÉTÉ LISSE SUR $\mathbb{Z}_p$ (X_p) $0 < i \leq p-2$ ET ON

DIAGRAM
$$\begin{tikzcd} X_p \arrow[d] & X \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathbb{Z}_p & \mathbb{C} \arrow[l] \arrow[ul, phantom, "\square"] \end{tikzcd}$$

ALORS $\ker\left(H^i(X, \mathbb{F}_p) \to H^i(U, \mathbb{F}_p)\right)$

A DIM $\geq H^0(X, \Omega^i)$

EX SI A EST UNE VAR AB SUR $\mathbb{Q}$ AVEC BONNE REDUCTION PARTOUT . . .

DEUX MOTS SUR CE THM 2 (ERREUR)

(1) pour $p \gg \dim(X)$ $\mathcal{X}/\mathbb{Z}_p$

$\forall U \subseteq X_p$

$\dim\left(H^i_{dR}(X_{p_0}, \mathbb{F}_p) \to H^i(U_{p_0}, \mathbb{F}_p)\right)$

$\geq \dim H^0(X_{p_0}, \mathbb{F}_p)$ (CELA UTILISE QUE $\mathbb{Z}_p = W(\mathbb{F}_p)$)

(DELIGNE-ILLUSIE)

② BHATT-SCHOLZE :

IL Y A UNE COHOMOLOGIE "PRISMATIQUE" $H^n(X, \Delta)$ QUI NOUS PERMET DE COMPARER FONCTORIELLEMENT

$H^n_{dR}(X_{p_0}, \mathbb{F}_p)$ ET $H^n(X, \mathbb{F}_p)$

$$\begin{array}{ccccc} H^n_{dR}(X_{p_0}, \mathbb{F}_p) & \leftarrow & H^n(X, \Delta) & \rightarrow & H^n(X, \mathbb{F}_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^n_{dR}(Y, \mathbb{F}_p) & \rightarrow & H^n(U, \Delta) & \leftarrow & H^n(Y, \mathbb{F}_p) \end{array}$$

AVANT : POUR $X/\mathbb{Z}_p$ PROPRE

A_{inf} BHATT-MORROW-SCHOLZE

· POUR $Y/\mathbb{Z}_p$ OUVERT IL FAUT AVOIR

UNE THÉORIE MEILLEURE...

• DIFFICULTÉ TECHNIQUES:

① • "$H^i(U,\Delta)/p = H^i(U, \mathbb{F}_p)$" SI $U/\mathbb{F}_p$

• "$H^i_{dR}(X_{p,n}) \to H^i_{dR}(U)$" SI $U/\mathbb{Z}_p$

$\Delta = A_{inf}$

$\Delta = \mathbb{Z}_p[T]$

A_{inf} COHOMOLOGIE

BREUIL-KISIN COHOMOLOGY.

② $H^i(U_p, \Delta)$ EST DÉFINI POUR SCHÉMAS FORMELS. SI X PROPRE NE CHANGE PAS TROP, SI X OUVERT IL FAUT FAIRE ATTENTION.

PROGRAMME: 8-10 EXPOSÉS:

1 [• DELIGNE-ILLUSIE ET APPLICATIONS.

4-6 [
- COHOMOLOGIE INFINITÉSIMALE ET COHOMOLOGIE DE DE-RHAM
- " CRISTALLINE
- A_{inf} ET BREUIL KISIN MODULES.
- A_{inf} COHOMOLOGIE
- PRISM ET SITE PRISMATIQUE.
- COHOMOLOGIE PRISMATIQUE

3 [
- CAS DE SCHÉMAS FORMELS
- SCHÉMAS VS "
- PREUVE DES THÉORÈMES PRINCIPALS.

26/01 - 2/2 - 9/2 - 23/2 - 2/3 - 9/3
- 16/3 - 23/3 - 30/3 - 6/4 - 20/4 - 27/4
4/5 - 11/5