

COMMENT TROUVER (OU PAS) UNE SOLUTION

D'UNE ÉQUATION ENTIERE.

SI $Q \in \mathbb{Z}[x_1 \dots x_m]$ $Q(\mathbb{Z}) := \{ (a_1 \dots a_m) \in \mathbb{Z}^m \mid Q(a_1 \dots a_m) = 0 \}$

THM (MATIASEVICH - MANN - DAVIS - PUTNAM, 1970)

~~∃~~ UN ALGORITHME QUI PREND $Q \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$
ET DÉCIDE SI $Q(\mathbb{Z}) = \emptyset$ OU PAS

EX (SOLÉ, 1982) $\exists$ UNE FAMILLE EXPLICITE

$P_a \in \mathbb{Z}[x_1 \dots x_m]$, $a \in \mathbb{Z}$, $\deg(P_a) = 4$ |

$\exists$ UN ALGORITHME QUI PREND $a \in \mathbb{Z}$ ET
DÉCIDE SI $P_a(\mathbb{Z}) = \emptyset$ OU PAS

[Q.] POUR QUELS POLYNOMES ON PEUT LE TROUVER?

EX. SI $\deg(Q) = 1$

$Q = a_1 x_1 + \dots + a_m x_m + b = 0$ $a_1, \dots, a_m, b \in \mathbb{Z}$.

$Q(\mathbb{Z}) = \emptyset$

Il.

(BEZOUT 1779)

$\text{PGCD}(a_1 \dots a_m) \mid b$

- SI $\deg(Q) = 2$? OUI MAIS PLUS DIFFICILE, ON UTILISE DES PRINCIPES LOCAL-GLOBAL.

EN GÉNÉRAL SI $Q(Z) \neq \emptyset$ ALORS

- $Q(\mathbb{R}) \neq \emptyset$

$$\left(\begin{array}{l} \text{E.g. } Q = x^2 + y^2 + 1 \\ Q(Z) = \emptyset \text{ CAR} \\ Q(\mathbb{R}) = \emptyset \text{ CAR} \\ x^2 + y^2 + 1 > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{array} \right)$$

- $Q(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}) \neq \emptyset$

$$\left(\begin{array}{l} \text{E.g. } Q = x^2 + 3y^2 + 1 \\ Q(Z) = \emptyset \text{ CAR} \\ Q(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}) = \emptyset \text{ CAR.} \\ x^2 \not\equiv -1 \pmod{3} \quad \forall x \in \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}. \end{array} \right)$$

- $Q = 0$ A UNE SOLUTION DANS $\frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}$, $\forall p, n$

$$\left(\begin{array}{l} \text{E.g. } Q = x^2 + y^2 + 1 \\ Q(Z) = \emptyset \text{ CAR.} \\ Q(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}) = \emptyset \text{ CAR} \\ x^2 + y^2 \not\equiv -1 \pmod{4} \quad \forall x, y \in \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}. \end{array} \right)$$

THM $\text{DEG}(Q) = 2$

- $Q(\mathbb{Z}) \neq \emptyset \Leftrightarrow Q(\mathbb{Z}_{p^m}) \neq \emptyset \forall p, \forall m \text{ ET } Q(\mathbb{Q}) \neq \emptyset \Leftrightarrow$
(HASSE - MINKOWSKI, 1921)

- SI ON ÉCRIT $Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} a_{ii} x_i$
 $+ a_{m+1, m+1}$, SI $2 \nmid \text{PRDET}(a_{ij})$ ALORS
 $Q(\mathbb{Z}_{p^m}) \neq \emptyset$
(HENDEL)

- DE PLUS SI ON DÉFINIT $Q_p := \begin{cases} 1 & \text{SI } Q(\mathbb{Z}_{p^m}) \neq \emptyset \forall m \\ -1 & \text{AUTREMENT} \end{cases}$
 $Q_\infty = \begin{cases} 1 & \text{SI } Q(\mathbb{Q}) \neq \emptyset \\ -1 & \text{AUTREMENT} \end{cases}$
ON A $(\prod_p Q_p) Q_\infty = 1$ (FORMULE DU PRODUIT)
 ~ 1900

CONSEQUENCE : $\exists$ ALGORITHME. QUI PERMET UN POLYNÔME DE DEGRÉ 2
ET NOUS DIRE S'IL A UNE SOLUTION.

DEG(P) ≥ 3? ON SAIT TRÈS PEU.

EX (REICHMAN^{ho}) $Q \nsubseteq \mathbb{Z}[X]_2 = X_1^4 - 17$ ALORS.

$Q(\mathbb{Z}/p_m\mathbb{Z}) \neq \emptyset, \forall p, m$, $Q(\mathbb{Z}) \neq \emptyset$ MAIS

$Q(\mathbb{Z}) = \emptyset$

~~Q~~ =

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DOUCER
THM ANSIN
IN $\mathbb{Z}$

Q QUELS COLLECTIONS DE SOLUTIONS "LOCALES"
ON PEUT RÉCÉLER?

DEF $\mathbb{Z}/p := \{ (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \mid x_m \in \mathbb{Z}/p_m\mathbb{Z} \mid x_m \equiv x_{m-1} \}$

ANALAU

$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/p$

$m \mapsto (m, m, m, \dots)$

$Q(\mathbb{Z}/p) \neq \emptyset \Leftrightarrow Q(\mathbb{Z}/p_m\mathbb{Z}) \neq \emptyset, \forall p, m$

$\iota: Q(\mathbb{Z}) \rightarrow \prod Q(\mathbb{Z}/p) \times Q(\mathbb{N})$

THM (OBSERVATION DE ARAUJO-MANIN, 1971)

$\exists$ UN GROUPE $BR(Q)[\mathbb{Z}]$ ET UN COUPLEMENT.

$\gamma: (\prod Q(\mathbb{Z}/p) \times Q(\mathbb{N})) \times BR(Q)[\mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{Z}/\mathbb{Z}. \quad \text{Q/Z}$

$$S1 \quad X \text{ VIENT DE } Q(Z) \quad \delta(x, a) = 0 \neq \delta \in \mathcal{AN}(Q|Z)$$

$$DMC \quad Q(Z) \subseteq (\prod Q(Z_p) \times Q(M))^{AN} \Rightarrow x \mid \delta(x, a) \neq 0$$

$$\underline{EX} \quad Q = 2x_2^2 + x_1^4 - 17 \text{ on } A \quad \forall a \in$$

$$\prod(Q(Z_p) \times Q(M)) \stackrel{OR}{=} \emptyset \Rightarrow \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{AN}(Q|Z) \ni \alpha \quad \leftarrow \text{CLASSIFICATION} \quad \forall \text{ DEFINITION}$$

$$\alpha \in M_{2,2}(A)$$

$$(\alpha)$$

$$\forall x \in X(A)$$

$$\forall a$$

$$K \text{ and } S$$

$$DS(\alpha) \neq 0$$

$$\text{"COMPANION E"}$$

$$(E, b)$$

$$X(\phi) \rightarrow M_{2,2}(\phi)$$

$$\alpha_p: Q(Z_p) \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{221}$$

$$\alpha$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S1 \quad (b, z, 1) \text{ and } \begin{pmatrix} b \\ z \end{pmatrix} \text{ ASOL.}$$

$$\alpha_\infty: Q(M) \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{221}$$

$$\text{"AUGMENT"}$$

$$\delta: \prod Q(Z_p) \times Q(M) \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{221}$$

$$((x_p), x_\infty) \mapsto \alpha_p(x_p) \cdot \alpha_\infty(x_\infty)$$

FORMULE DU MINUT $\Rightarrow$ SI $x \in Q(Z)$ ALORS $\exists d \neq 0$ tel que $dx \in \mathbb{Z}$

EX (RAGANO 2023)

$$Q(Z) \neq 0$$

$$(1, 0, -1)$$

$$Q = x^3 + x^3z + z^3 + x + xz$$

ON PEUT ÉTENDRE :

$$\text{AR}(Q(Z)) \ni \alpha : \begin{pmatrix} \frac{z^3 + x + xz}{x^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{z}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

À $x \neq 0$, $z^3 + x + xz \neq 0$, $-\frac{z}{x} \neq 0$ ET

$\exists$ calculons $\left((x_p), x_\infty \right) \in \mathbb{Q}(Z/p) \times \mathbb{Q}(1/p)$

$$\delta(T, \alpha) \neq 0.$$

CAUTION NOW!

RMQ: Q sur $\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}p}$.

$$\frac{d\left(\frac{z^3 + x + xz}{x^3}\right)}{\frac{z^3 + x + xz + x}{x^3}} \wedge \frac{d\left(-\frac{z}{x}\right)}{-\frac{z}{x}}$$

PEUT ÊTRE ÉTENDU

À UNS 2-FORMS DIFF. GORDAIS SUR $\mathbb{Q}(\frac{z}{2x})$
 $H^2(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$

$$\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^4 - 17)}$$

$$x^4 - 17 = 0$$

$$\delta_{y=a_3}(y, 17)$$

$$2x^2 = x^4 - 17$$

$$\frac{(-1)^{V(L)} V(L)}{h^{V(L)}} \frac{a^{V(L)}}{h^{V(L)}} =$$

$$17 = 2x^2 - x^4$$

$$\frac{x^0}{17^1} = 17$$

$$\delta_{y=a_3}(y, 2x^2 - x^4) =$$