THÉORÈME DE CHANGEMENT DE BASE PROPRE POUR LA COHOMOLOGIE COHÉRENTE

1. MOTIVATION

k CORPS $\quad X/k$ COURBE LISSE PROJECTIVE $g_X \geq 2$

- Ω^1_X EST AMPLE
- $(\Omega^1_X)^{\otimes 3}$ EST TRÈS AMPLE.
- $\dim(H^0(X, (\Omega^1_X)^{\otimes 3})) = 5g - 5$

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, (\Omega^1_X)^{\otimes 3})) = \mathbb{P}^{5g-6}$$

PLONGEMENT CANONIQUE.

$$\left\{\begin{array}{c}\text{COURBE}\\ \text{DE GENRE}\\ g \geq 2\end{array}\right\} \subseteq \left\{\begin{array}{c}\text{SOUS SCHÉMAS}\\ \text{DE } \mathbb{P}^{5g-6}\end{array}\right\}$$

POUR CONSTRUIR UN ESPACE DE MODULE ON VEUT FAIRE LA "MÊME" CHOSE EN FAMILLE.

S SCHÉMA $S = \mathrm{Spec}(A)$

A ANNEAU LOCAL NOETHÉRIEN

$\mathfrak{m}$ IDÉAL MAXIMAL

$K := \dfrac{A}{\mathfrak{m}}$ $\left(\dfrac{K[x]}{(x^2)} , K[[t]], \mathbb{Z}/p \right)$

$X \to S$ FAMILLE DE COURBES

(MORPHISME LISSE PROJECTIVE) FIBRE DE DIMENSION 1 GÉOM CONNEXE, ET DE GENRE g

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{COURBE} \\ \text{SUR } S \\ \text{DE GENRE } g \end{array} \right\} \overset{?}{\subseteq} \left\{ \begin{array}{c} \text{SOUS SCHÉMA} \\ \text{DE } \mathbb{P}^{5g-6}_S \end{array} \right\}$$

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & K \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Q. EST-CE-QUE $(\Omega^1_{X/S})^{\otimes 3}$ EST TRÈS AMPLE?

Q : $H^0(X, (\Omega^1_{X/S})^{\otimes 3}) = ?$

IDÉE BÊTE

$$\begin{tikzcd} H^0(X, (\Omega^1_{X/S})^{\otimes 3}) \arrow[r] \arrow[d, "\text{SURJECTIVE?}"] & H^0(X, (\Omega^1_{X/S})^{\otimes 3}) \otimes K \arrow[dl, "\text{ISOMORPHE?}"] \\ H^0(X_0, (\Omega^1_{X_0/K})^{\otimes 3}) & \end{tikzcd}$$

② LE CAS DE COURBES.

LE PROBLÈME N'EST PAS TRIVIAL!!

- SI $X \overset{\text{Spec}(R)}{=}$ EST AFFINE SUR S

$$H^0(X, \Omega^1_X) \twoheadrightarrow H^0(X_0, \Omega^1_{X_0})$$
$$\|$$
$$\Omega^1_{R/A} \twoheadrightarrow \Omega^1_{R\otimes K/K} = \Omega^1_R \otimes K$$

- SI $X = \text{Spec}(R_1) \cup \text{Spec}(R_2)$,

$X_0 = \text{Spec}(R_{1,0}) \cup \text{Spec}(R_{2,0})$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(X,\Omega^1) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(R_1,\Omega^1_{R_1}) \oplus H^0(R_2,\Omega^1_{R_2}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(R_1\cap R_2) \arrow[d] \\
& & (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \arrow[r, mapsto] & ?0? \\
0 \arrow[r] & H^0(X_0) \arrow[r] & H^0(R_{1,0}) \oplus H^0(R_{2,0}) \arrow[r] & H^0(R_{1,0}\cap R_{2,0}) \\
& w \arrow[r, mapsto] & (w_1, w_2) \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}
$$

<u>EX</u> $X \to S$ courbe elliptique.

$\mathcal{L}/X$ fibré en droite tel que

$\mathcal{L}_0 \simeq \mathcal{O}_{X_0}$ mais $\mathcal{L} \not\simeq \mathcal{O}_X$

$$H^0(X,\mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi} H^0(X_0,\mathcal{L}_0) = H^0(X_0,\mathcal{O}_{X_0}) = K$$

Si φ est surjective alors on peut relever l'isomorphisme

$\mathcal{L}_0 \simeq \mathcal{O}_{X_0}$ À UN ISOMORPHISME

$\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X$ ↯.

DONC g N'EST PAS SURJECTIVE.

THÉORÈME $\mathcal{F}/X$ COH. LIBRE

$X \to S$ COURBE

- ON A TOUJOURS

$$H^q(X, \mathcal{F}) \otimes k \hookrightarrow H^q(X_0, \mathcal{F}_0)$$

- LES CONDITIONS SUIVANTES SONT ÉQUIVALENTES :

1. LA FLÈCHE
$H^q(X, \mathcal{F}) \to H^q(X_0, \mathcal{F}_0)$ EST SURJECTIVE

② LA FLÈCHE

$H^0(X,\mathcal{F})\otimes k \to H^0(X_0,\mathcal{F}_0)$ EST

UNE ISOMORPHISME.

③ $H^0(X,\mathcal{F})$ EST PLAT COMME

A-MODULE

· DANS CE CAS $H^0(X,\mathcal{F})$ EST LIBRE.

COROLLAIRE $f: X \to S$ $H^0(X,(\Omega^1_{X/S})^{\otimes 3})$

SI $g_X \geq 2$ ALORS IL Y A EST LIBRE

UN PLONGEMENT CANONIQUE ET

$$X \hookrightarrow \mathrm{Proj}_S(H^0((\Omega^1_{X/S})^{\otimes 3}))$$

PREUVE $\mathcal{F} = (\Omega^1_{X/S})^{\otimes 3}$

RR. $H^1(X_0,(\Omega^1_{X_0})^{\otimes 3}) = 0$

PAR LE THÉORÈME.

$$H^1(X,\mathcal{F})\otimes k \simeq H^1(X_0,\mathcal{F}_0)=0$$

PAR NAKAYAMA

$$H^1(X,\mathcal{F})=0$$ (EN PARTICULIER $H^1(X,\mathcal{F})$ EST PLAT)

PAR LE THÉORÈME.

$$H^0(X,\mathcal{F})\otimes k \simeq H^0(X_0,\mathcal{F}_0)$$

$f^*(H^0(X,\mathcal{F})) \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ EST SURJECTIVE. ET ON A

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{P}_S(H^0(X,\mathcal{F})) \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

Et on vérifie que c'est un plongement. $\blacksquare$

<u>Preuve</u> $(X = \operatorname{spec}(R_1) \cup \operatorname{spec}(R_2))$

$$\operatorname{spec}(R_{1,2}) = \operatorname{spec}(R_1) \cap \operatorname{spec}(R_2)$$

M.V.

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(R_1,\mathcal{F}_1)\oplus H^0(R_2,\mathcal{F}_2) \to H^0(R_{1,2},\mathcal{F}_{1,2}) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to 0$$

$$0 \to H^0(\mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{F}_1)\oplus H^0(\mathcal{F}_2) \hookrightarrow T \to 0$$

$$0 \to T \to H^0(R_{1,2},\mathcal{F}_{1,2}) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to 0$$

$$\begin{tikzcd}
\overset{?}{\to} \cancel{\mathrm{Tor}^1}(T,k) \arrow[r] & H^0(\mathcal{F})\otimes k \arrow[r, hook] \arrow[d, "\wr"] & H^0(\mathcal{F}_1)\otimes k \oplus H^0(\mathcal{F}_2)\otimes k \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & T\otimes k \arrow[r] \arrow[d, "\wr\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(\mathcal{F}_0) \arrow[r] & H^0(\mathcal{F}_{1,0})\oplus H^0(\mathcal{F}_{2,0}) \arrow[r] & T_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
\cancel{\mathrm{Tor}_1(H^q(F), k)} \arrow[r] & T \otimes k \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^q(F_{1,2}) \otimes k \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^q(X, F) \otimes k \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_1 \otimes k \arrow[r] & H^q(F_{1,2,0}) \arrow[r] & H^q(X_0, F_0) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

PAR LE LEMME DU SERPENT

$$\mathrm{Ker}\left(H^q(F) \otimes k \to H^q(F_0)\right) = 0$$

- Supposons que $H^q(X, F)$ soit plat

$\Rightarrow T$ est plat $\Rightarrow H^q(X, F) \otimes k \simeq H^q(X_0, F_0)$

- Supposons que

$$H^q(X,\mathcal{F}) \twoheadrightarrow H^q(X_0,\mathcal{F}_0)$$

par le lemme du serpent on trouve que

$$\ker(T\otimes k \to T_0) = 0.$$

Donc

$$T\otimes k \hookrightarrow H^q(\mathcal{F}_{1,2})\otimes k$$

Donc $\mathrm{Tor}^1(H^q(X,\mathcal{F}),k) = 0$

$\Rightarrow$ $H^q(X,\mathcal{F})$ est plat

critère local de platitude.

ex $K_\varepsilon = \dfrac{K(t)}{(T^2)}$

$E \to S$ ~~courbe~~ courbe elliptique.

$\mathcal{L} \not\cong \mathcal{O}_X \qquad \mathcal{L}_0 \cong \mathcal{O}_{X_0}$.

$H^0(X, \mathcal{L}) \not\twoheadrightarrow H^0(X_0, \mathcal{L}_0)$

$\overset{\text{THM}}{\Longrightarrow}$ $H^1(X, \mathcal{L})$ n'est pas plat.

THM $\Rightarrow$ $H^1(X, \mathcal{L}) \otimes K$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \wr\!\!\shortparallel$

$K = H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) \cong H^1(X_0, \mathcal{L}_0) \otimes K$

$H^1(X, \mathcal{O})$ est cyclique

$$\| $$

$$\frac{K(T)}{(T)} \quad (= K)$$

$$H^0(X, \mathcal{L}) \cong \left(H^1(X, \mathcal{L}^\vee)\right)^\vee$$

D-G-S

$$\cong$$

$$\left(\frac{K(T)}{(T)}\right)^\vee$$

$$\|$$

$$(T) = \mathrm{Ann}(T)$$

$$H^0(X, \mathcal{L}) = (T) \quad \blacksquare$$

3 LE CAS GÉNÉRAL.

$X \to S$ MORPHISME PLAT PROPRE. (SÉPARÉ)

$\mathcal{F}/X$ LOCALEMENT LIBRE.

($\mathcal{F}$ EST PLAT SUR S.

THÉORÈME

SUPPOSONS QUE.

$$H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X_0, \mathcal{F}_0)$$

EST SURJECTIVE. ALORS.

- $H^n(X, \mathcal{F}) \otimes k \xrightarrow{\sim} H^n(X_0, \mathcal{F}_0)$

· LES CONDITIONS SUIVANTES SONT ÉQUIVALENTES.

① $H^{n-1}(X,F) \otimes K \cong H^{n-1}(X_0,F_0)$

② $H^n(X,F)$ EST PLAT.

REMARQUE.

· SI N EST LA DIMENSION DE X_0.

$H^{N+1}(X_0,F_0) = 0$

$\Rightarrow H^{N+1}(X,F) \otimes K \cong 0$

$\Rightarrow H^{N+1}(X,F) = 0$
(PLAT)

$\Rightarrow H^N(X,F) \otimes K \cong H^N(X_0,F_0)$

• Si $H^i(X_0,\mathcal{F}_0)=0$

$\Rightarrow H^{i-1}(X,\mathcal{F})\otimes k \simeq H^{i-1}(X_0,\mathcal{F}_0)$

• Si $H^1(X_0,\mathcal{F}_0)=0$

Alors $H^0(X,\mathcal{F})\otimes k$

$\simeq$

$H^0(X_0,\mathcal{F}_0)$ est

$H^0(X,\mathcal{F})$ est libre.

<u>Corollaire</u>

$h : X \to S = \mathrm{Spec}(A)$ propre, plat, fibres géométriquement

connexes & réduites :

Alors.

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq A$$

Preuve

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{O}_X) &\longrightarrow H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = K \\ 1 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

n'est pas triviale.
Donc est surjective

Thm $\Rightarrow$ $H^0(X, \mathcal{O}_X) \otimes K \simeq K$.
$H^0(X, \mathcal{O}_X)$ est libre

de rang 1.

$A \to H^q(X, \mathcal{O}_X)$ est surjective (Nakayama + information sur la fibre spéciale.).

<u>Théorème</u> (Grauert)

A réduit.

Si $\dim(H^n(X_p, \mathcal{F}_p))$ est constant pour $p \in \operatorname{Spec}(A)$

Alors $H^p(X, \mathcal{F})$ est libre

et $H^p(X, \mathcal{F}) \otimes k \cong H^p(X_0, \mathcal{F}_0)$

EXEMPLE SI A EST RÉDUIT EST $X \to \mathrm{Spec}(A)$ EST UNE FAMILLE DE COURBE ALORS $H^q(X, \Omega^1_{X/S})$ EST LIBRE.

EXERCICE : LE MÊME EST VRAI SI A N'EST PAS RÉDUIT.