RÈLEVEMENTS MODULO p^2 ET DÉCOMPOSITION DU COMPLEXE DE DE-RHAM.

1. COHOMOLOGIE DE DE-RHAM

- X VARIÉTÉ RÉELLE $\dim X = 2n$

$$H^n(X,\mathbb{R}) \simeq H^n_{DR}(X).$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \underline{\mathbb{R}} & \to 0 & & & & & & \\ & \downarrow & & & & & & & \\ \Omega^\bullet_X & C^\infty(X) & \to & \Omega^1_X & \to & \Omega^2_X & \to \cdots & \Omega^{2n}_X & \to 0 \end{array}$$

- $\Omega^\bullet_X$ EST UNE RÉSOLUTION DE $\underline{\mathbb{R}}$ (LEMME DE POINCARÉ)

• Ω^1_X FAISCEAUX ACYCLIQUE

$$H^n(X,\mathbb{R}) = H^n(\Gamma(X,\Omega^\bullet_X)) =: H^n_{dR}(X).$$

• X^n VARIÉTÉ COMPLEXE DIM n

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \underline{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & & \\
\Omega^{h,\bullet}_X & 0 \arrow[r] & \Omega^0_X \arrow[r] & \Omega^1_X \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \Omega^n_X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

• $\Omega^{h,\bullet}_X$ EST UNE RÉSOLUTION DE $\underline{\mathbb{C}}$

• Ω^1_X NE SONT PAS ACYCLIQUE.

<u>EX</u> $X^h = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. $\Omega^1_X = \mathcal{O}(-2)$

$$H^1(X^h,\Omega^1_X) = \mathbb{C}.$$

CELA CONDUIT À L'HYPERCOHOMOLOGIE

ON REPLACE $\Omega^\bullet_X$ ~~ta~~ AVEC
UN COMPLEXE $I^\bullet$ D'INJECTIFS
QUASI - ISOMORPHO.

$$H^n_{DR}(X) := \underset{\substack{\uparrow \\ \text{HYPER COHOMOLOGIE}}}{\mathbb{H}}^n(X, \Omega^\bullet_X) := H^n(\Gamma(X, I^\bullet)).$$

DEUX SUITES SPECTRALES.

1 - SS H-DR $\quad {}_hE_1^{n,j} := H^j(X, \Omega^n) \Rightarrow H^{n+j}_{DR}(X).$

2 - SS C $\quad {}_cE_2^{n,j} := H^n(X, \mathcal{H}^j(\Omega^\bullet_X)) \nearrow$

$$\mathcal{H}^j := \frac{\ker(\Omega^j \to \Omega^{j+1})}{\operatorname{Im}(\Omega^{j-1} \to \Omega^j)}$$

$\Omega^n_X \to \Omega^{n+1}_X$ NE SONT PAS $\mathcal{O}_X$-LINÉAIRE.

CONCRETEMENT.

IL Y A DEUX FILTRATIONS.

DE $H^n_{DR}(X)$ TELS QUE LES GRADUÉS SONT SOUS-QUOTIENTS DE ${}_hE_1^{r,s}$ POUR $r+s=n$

OU DE ${}_cE_2^{r,s}$ " ".

PREMIÈRE SUITE SPECTRAL $\Rightarrow$

X EST COMPACT ALORS

$H^n_{DR}(X)$ EST DE DIMENSION FINIE

2ÈME SUITE, COMME $\Omega^\cdot_X$ EST UNE RÉSOLUTION DE $\mathbb{C}$,

$\Rightarrow H^n(X,\underline{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{H}^n(X,\Omega^\cdot) = H^n_{DR}(X)$.

<u>THÉORÈME</u> X PROJECTIVE LISSE.

SS. HdR DÉGÉNÈRE DANS CA

PREMIÈRE PAGE. (☺)

$$\dim(H^n_{DR}(X)) = \sum_{s+\ell=n} \dim(H^s(X,\Omega^\ell_X))$$

• CAS ALGÉBRIQUE.

X/K K CORPS $p = \mathrm{CAR}(K) \geq 0$.

X/K VAR. LISSE IRRÉDUCIBLE.

$H^n_{ZAR}(X, \underline{?}) = 0$ $n > 0$.

$H^n_{DR}(X/K) := \mathbb{H}^n(X, \Omega^\bullet_X)$

• LE COMPLEXE $\mathcal{O}_X \to \Omega^1 \to \Omega^2 \to \dots$ N'EST PAS EXACT (E.G. $X = \mathbb{A}^1$)

• $H^j(X, \Omega^n_X)$ NE SONT PAS 0.

① $E_1^{p,q} := H^q(X, \Omega^p_X) \Rightarrow H^{p+q}(X/K)$

(2) $E_2^{p,q} := H^p(X, \mathcal{H}^q) \Rightarrow H^{p+q}_{dR}(X/K)$

<u>EX</u> X/K curva proiettiva.

$$\begin{array}{lccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 \\
(1). & H^1(X,\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{d} & H^1(X,\Omega^1) & & 0 \\
E_1 & H^0(X,\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{d} & H^0(X,\Omega^1) & & 0
\end{array}$$

$$0 \to \frac{H^0(X,\Omega^1)}{d(H^0(X,\mathcal{O}_X))} \to H^1_{dR}(X) \to \mathrm{KER}\left(\begin{array}{c} H^1(X,\mathcal{O}_X) \\ \downarrow \\ H^1(X,\Omega^1_X) \end{array}\right) \to 0$$

$$\begin{array}{lccc}
 & 0 & & 0 \\
(2) & H^0\left(X, \frac{\Omega^1}{\mathrm{Im}(\mathcal{O}_X\to\Omega^1)}\right) & & H^1\left(X, \frac{\Omega^1}{\mathrm{Im}(\mathcal{O}_X\to\Omega^1)}\right) \\
E_2 & H^0(X, \ker(\mathcal{O}_X\to\Omega^1)) & & H^1\left(X, \frac{\Omega^1}{\mathrm{Im}(\mathcal{O}_X\to\Omega^1)}\right)
\end{array}$$

$$
\begin{array}{c}
0 \to H^1(X, \ker(\mathcal{O}_X \to \Omega^1_X)) \\
\downarrow \\
H^1_{DR}(X) \\
\downarrow \\
H^0\left(X, \dfrac{\Omega^1_X}{\mathrm{Im}(\mathcal{O}_X \to \Omega^1_X)}\right) \\
\downarrow \\
0
\end{array}
$$

__COROLLAIRE DU THM 1__ $\left(\begin{array}{c}\text{GAGA} \\ + \\ \text{HIRONAKA}\end{array}\right)$

SI X EST PROPRE ET $p=0$

$_hE_1^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}_{DR}(X)$ DÉGÉNÈRE

EN E_1.

PAR CONTRE ON PEUT

RIEN DIRE SUR

$C^{E_2^{n/h}}$ CAR

LE MORPHISME $\mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{n+1}$

NE SONT PAS LINÉAIRES

DONC ON PEUT PAS

UTILISER GAGA POUR

LES COMPARER AVEC LEUR

VERSION HOLOMORPHE.

LA DÉMONSTRATION DU

COROLLAIRE N'EST PAS

SATISFAISANT CAR

① IL DIT RIEN SI P>A.

② JE N'AIME PAS L'ANALYSE...

LA PREMIÈRE DÉMONSTRATION ALGÉBRIQUE DU CAS 1 EST DUE À FALTINGS (AUTRE QUE DT) EN UTILISANT LA THÉORIE DE HODGE P-ADIQUE.

CE N'EST PAS TRÈS SATISFAISANT CAR

① IL DIT RIEN SI P>A

② IL UTILISE "ANALYSE" p-ADIQUE.

RMQ $X/\mathbb{F}_p$ PROPRE ET LISSE. CE N'EST PAS VRAI EN GÉN. SSHNR DÉGÉNÈRE. (MUMFORD).

MALGRÉ CELA ON A

<u>THM</u> (DELIGNE-ILLUSIE)

K PARFAIT, $p>0$.

X/K PROPRE ET LISSE.

SI $\dim(X) < p$ ET

X SE RELÈVE SUR $W_2(k)$.
($k = \mathbb{F}_p$, $W_2(k) = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$)
ALORS ÇA SS HdR DÉGÉNÈRE
EN E_1.

<u>THM</u> $\Rightarrow$ <u>COR</u>

2) CARACTÉRISTIQUE POSITIVE.

$\boxed{A}$ COHOMOLOGIE DE DE-RHAM EST PLUS DIFFICILE EN CAR$(k) > 0$?

Ⓑ COHOMOLOGIE DE DE-RHAM PLUS FACILE ?

EN CAR$(K) \geq 0$

X/K, K PARFAIT

LISSE, IRRÉDUCIBLE.

$\boxed{A}$ SI K EST DE CARACTÉRISTIQUE 0, $H^m_{DR}(X/K)$ EST DE DIMENSION FINIE.

SI $p>0$, N'EST PRESQUE JAMAIS VRAI.

(SI X N'EST PAS PROPRE)

__EX__ $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}$

$$\mathbb{F}_p[T] \xrightarrow{d} \mathbb{F}_p[T]dT$$

$H^0_{DR} = \ker(d)$ est gros!

car $d(x^{pn}) = pn\, x^{pn-1} dx$
$$\underset{0}{\parallel}$$

$$\ker(d) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{F}_p \cdot x^{pn} = \mathbb{F}_p[x^p]$$

$H^1_{DR} = \operatorname{coker}(d)$ est gros!

X^{p-1} N'EST PAS DANS L'IMAGE ($\int X^{p-1} = \frac{X^p}{p}$)

$$\mathrm{COKER}(d) = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{F}_p \cdot X^{pn-1}$$

DONC H^1_{DR} EST DE DIMENSION INFINIE.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{F} & \mathbb{A}^1 \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \\ \mathbb{F}_p[X] & \xrightarrow{F} & \mathbb{F}_p[X] \\ X & \longmapsto & X^p \end{array}$$

$H^0_{DR}(X) =$ L'IMAGE DE F

$$H^1_{DR}(X) \simeq \Omega^1_{/\mathbb{A}^1}$$

$$\mathbb{F}_p[x^p] \subseteq \mathbb{F}_p[x] .$$

ET ON REGARDE.

$$\mathbb{F}_p[x] \xrightarrow{d} \mathbb{F}_p[x]\,dx .$$

d EST LINÉAIRE EN TANT QUE $\mathbb{F}_p[x^p]$-MODULE

$$d(x^p g) = \underbrace{g\,dx^p}_{0} + \underbrace{x^p dg}_{x^p dg .}$$

PLUS FORMELLEMENT.

$X \to S$ MORPHISME DE SCHÉMA EN CARACTÉRISTIQUE p.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "F_{X/S}"] \arrow[rd, bend left, "F_X"] \arrow[dd, bend right] & \\
X^{(1)} \arrow[r] \arrow[d, "h^{(1)}"'] \arrow[rd, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "h"] \\
S \arrow[r, "F_S"] & S
\end{tikzcd}$$

$F_S : |S| = |S|$

$\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S$

$x \mapsto x^p$

EX

$\sum a_n x^n \mapsto \sum a_n^p x^{pn}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^1 \arrow[d] \arrow[rd, bend left] \arrow[dd, bend right] & \\
\mathbb{A}^1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1 \arrow[d] \\
K \arrow[r] & K
\end{tikzcd}$$

$\sum a_n x^n \mapsto \sum a_n x^{pn}$

$\sum a_n x^n \mapsto \sum a_n^p x^n$

$$\mathcal{O}_X \to \Omega^1_X \to \Omega^2_X \to \dots \to \dots$$

$$\downarrow F_{X/S}$$

$$F_\bullet \mathcal{O}_X \to F_\bullet \Omega^1_X \to \dots \to 0$$

EST UN COMPLEXE DE MODULE $\mathcal{O}_{X^{(1)}}$-COHÉRENT.

<u>LEMME</u>. $F_{X/S}$ EST UN HOMÉOMORPHISME UNIVERSEL

- $F_{X/S}$ FINI ET PLAT.

EX $H^n(X, \mathcal{O}_X) = H^n(X^{(1)}, F_\bullet \mathcal{O}_{X^{(1)}})$

EN PLUS

THÉORÈME (CARTIER)

X/S LISSE. $\exists!$ ISOMORPHISME DE $\mathcal{O}_{X^{(1)}}$-MODULES

$$C^{-1} : \Omega^1_{X^{(1)}/S} \longrightarrow \mathcal{H}^1(F_\bullet \Omega^\bullet_{X/S})$$

TEL QUE

- $C^{-1}(1) = 1$
- $C^{-1}(\omega \wedge \tau) = C^{-1}(\omega) \wedge C^{-1}(\tau)$
- $C^{-1}(df \otimes 1) = f^{p-1} df$

$$\Omega^1_{X^{(1)}/S} = f^* \Omega^1_{X/S}$$

$$\begin{gathered} \| \\ \Omega^1_{X/S} \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_{X'} \end{gathered}$$

EX X/k courbe propre, lisse.

$$\begin{array}{lll}
0 & & \\
\downarrow & & \\
H^q(X, \ker(\mathcal{O}_X \to \Omega^1_X)) & & \\
\downarrow & \cong & H^q(X^{(1)}, F_* \ker(\mathcal{O}_X \to \Omega^1_X)) \\
H^q_{dR}(X) & \cong & H^q(X^{(1)}, \mathcal{O}_{X^{(1)}}) \\
\downarrow & & \\
H^q\left(X, \dfrac{\Omega^1}{\mathrm{im}(\mathcal{O}_X \to \Omega^1_X)}\right) & & \\
\downarrow \quad \cong & &
\end{array}$$

$$H^1(X^{(1)}, F_* (\Omega^1 / \mathrm{Im}(\mathcal{O}_X \to \Omega^1_X)))$$

$$\parallel$$

$$H^1(X^{(1)}, \Omega^1_{X^{(1)}/k})$$

DONC

$$0 \to H^1(X^{(1)}, \mathcal{O}_{X^{(1)}}) \to H^1_{DR}(X) \to H^1(X^{(1)}, \Omega^1_{X^{(1)}}) \to 0$$

EN PLUS SI K PARFAIT:

$$H^1(X^{(1)}, \mathcal{O}_{X^{(1)}}) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

$$H^0\left(X^{(1)}, \Omega^1_{X^{(1)}}\right) \simeq H^0\left(X, \Omega^1_X\right).$$

DONC

$$\dim\left(H^1_{DR}(X)\right)$$

$$\shortparallel$$

$$\dim\left(H^1(X, \mathcal{O}_X)\right) + \dim\left(H^0(X, \Omega^1_X)\right)$$

DONC LA SUITE SPECTRALE

~~DIT~~ EST DÉGÉNÉRÉE !!