LE THÉORÈME DE FONTAINE

⚠ IL Y AURA DES INÉGALITÉS.

THÉORÈME

SOIT $X/\mathbb{Z}$ PROPRE ET LISSE.

ALORS $H^i(X_{\mathbb{Q}}, \Omega^j) = 0$ SI

$i+j \leq 3$ ET $i \neq j$.

COROLLAIRE IL N'Y A PAS DES VARIÉTÉS ABELIENNES SUR $\mathbb{Z}$.

IDÉE: $X/\mathbb{Z}$ VAR. AB.

MINKOWSKI: IL N'Y A PAS DES EXTENSION PAS RAMIFIÉES DE $\mathbb{Q}$

π

$$\overline{\prod_p I_p} = \mathrm{GAL}(\bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}) = \pi_1(\mathbb{Q})$$

INERTIE

$\forall \ell$

$$\rho_\ell : \pi_1(\mathbb{Q}) \longrightarrow GL(T_\ell(X))$$

SI $p \neq \ell$ ALORS

I_p AGIT TRIVIALMENT SUR T_ℓ

IL FAUT COMPRENDRE L'ACTION DE I_ℓ

FONTAINE: $\rho_\ell|_{\pi_1(\mathbb{Q}_\ell)}$ EST TRÈS PEU RAMIFIES DANS $X(\mathbb{Q})[\ell^\infty]$ EST GROS. ABSURDE PAR LE THM. MORDELL-WEIL.

THÉORÈME : $n \in \mathbb{N}$

$C_{[0,i]}$:

- GROUPES ABÉLIENS FINIS TUÉS PAR UNE PUISSANCE DE ℓ AVEC ACTION DE $\pi_1(R)$
- NE SONT PAS RAMIFIÉS DEHORS ℓ.
- ACTION EST CRISTALLINE EN ℓ ET AVEC POIDS DE HODGE TATE ENTRE $[0,i]$.

C'EST DANS L'IMAGE DE U COMME $\mathbb{Q}_\ell$-REP.

$$\mathrm{Fil}^{n+1} = 0$$

$$\begin{tikzcd} MF^{tor}_{[0,n]} \arrow[d, "U"] \\ \mathrm{Rep}(\pi_1(\mathbb{Q}_\ell))^{tors} \end{tikzcd}$$

NOT : χ_m LE ℓ-ÈME CARACTÈRE CYCLOTOMIQUE $\pi_1(\mathbb{Q}) \to (\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})^\times$

$V \in \mathcal{C}_{[0,r]}$

$\cdot \ \chi^r(V) = \{ v \in V \mid \gamma \cdot v = \chi^r(\gamma) \cdot v \quad \forall \gamma \in \pi_1(Q) \}$

<u>THÉORÈME'</u> SI $r \leq 3$ ET $V \in \mathcal{C}_{[0,r]}$ IL Y A UNE FILTRATION CANONIQUE

$$0 \subseteq F^4 \subseteq F^3 \subseteq F^2 \subseteq F^1 \subseteq F^0 = V$$

TEL QUE

$$\frac{F^r}{F^{r+1}} = \chi^r\left(\frac{F^r}{F^{r+1}}\right)$$

EX

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(1) \to \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}(1) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(1) \to 0$$

DE PLUS :

• SI $i \leq 2$ $\quad V \simeq \bigoplus_{i=1}^{2} \chi^i(V)$

• SI $i = 3$ ET $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{F}_\ell) = 0$

$$V \simeq \bigoplus_{i=0}^{3} \chi^i(V)$$

THÉMÈME' $\Rightarrow$ THÉORÈME.

$\boxed{A}$ X/k VAR. AB.

• H.P.S. X EST PRINCIPALEMENT POLARISÉ.

• $\pi_1(k) \longrightarrow GL(X[\ell^n])$

THM' $\Rightarrow$ $\underset{\text{SI}}{X[\ell^n]} = \chi^0(V) \oplus \chi^1(V)$

$$X[7^n]^\vee(1) = x^0(\vee)(1) \oplus x^1(\vee)^\vee(1)$$

$$\Downarrow$$

$$x^q(\vee) \simeq \left(\frac{\mathbb{Z}/}{p^n\mathbb{Z}/}\right)^g \quad g = \dim(X)$$

DUNC $\cancel{A}[7^\infty](k) = \mathbb{Q}_7/\mathbb{Z}/7 \quad \lightning$.

$\boxed{B}$

$$H^1(X_{q_5}, \Omega^5) \in \text{MATTIA} : \begin{cases} \mathbb{Q}_7(1)^{\pi_1(q_4)} = 0 & n \neq 0 \\ \mathbb{Q}_4 & n = 0 \end{cases}$$

$$\left(\bigoplus_{a+h=n+5} H^a(X_{q_4}, \Omega^h) \oplus \mathbb{Q}(5-h)\right)^{\pi_1(q_4)} \in \begin{matrix}\text{MATTIA} \\ \text{CARLO}\end{matrix}$$

$$\left(H^{r+s}_{\text{ÉT}}(X_{\bar{\mathbb{F}}_7}, \mathbb{Q}_\ell)\otimes \mathbb{C}(J)\right)^{\Phi, \mathbb{Q}_\ell}$$

$$\underset{\substack{\cong \\ V_{r,s}}}{H^{r+s}_{\text{ÉT}}(X_{\bar{\mathbb{Q}}_7}, \mathbb{Q}_\ell)} = \left(\varprojlim H^{r+s}\left(X_{\bar{\mathbb{Q}}_7}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}\right)\right) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

$$H^{r+s}_{\text{ÉT}}\left(X_{\bar{\mathbb{Q}}_7}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}\right)^{\vee} \in \mathcal{C}_{[0,3]} \qquad (r+s \leq 3)$$

ARCHIA, RUTGER, ANTOINE

<u>THM'</u> $\Rightarrow$ IL Y A UNE FILTRATION

$$0 \subseteq F_4 \subseteq F_3 \subseteq F_2 \subseteq F_1 \subseteq F_0 = V_{r,s}$$

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} \overset{(\bullet)}{\cong} \mathbb{Q}_\ell(-n), \quad \ell \neq 7$$

$\mathrm{Fr}_\ell \circlearrowleft H^{1+5}$. λ, VALEUR PROPRE.

$$|\lambda| \overset{(*)}{=} \ell^{-m}$$

$$\parallel$$

<u>WEIL</u> $\Rightarrow$ $|\lambda| = \ell^{\frac{1+5}{2}}$

$$2m = -1-5.$$

$$\Downarrow$$

THM. $\blacksquare$

BORNE SUR LE DISCRIMINANT.

$n = [K:\mathbb{Q}] < +\infty$.

MINKOWSKI $\Rightarrow$ $\sqrt{d_K} \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{n^n}{n!}$

THÉORÈME $V \in {}^{C}[q, r]$ $\quad 1 \le r \le 5$

$$K_V := \overline{\mathbb{Q}}^{G} \qquad [K_V : \mathbb{Q}] = n.$$

V TUÉ PAR 4. $\quad G : \ker\left(\pi_1(\mathbb{Q}) \longrightarrow GL(V)\right)$

Alors $\sqrt[n]{N_{K_V}} < 7^{1+\frac{r}{6}}$

EX $\mathbb{Q}(\mu_7)$ $\quad \sqrt[n]{N_K} = 7^{1-\frac{1}{6}}$

$\mathbb{F}_\ell(1)$

- $\mathbb{Q}(\mu_{7^2})$ $\quad \sqrt[n]{N_K} = 7^{2-\frac{1}{6}}$

$\dfrac{\mathbb{Z}}{7^2\mathbb{Z}}(1)$

$\bullet\ \mathbb{Q}(\mu_4, \sqrt[4]{7}) = K \qquad \sqrt[n]{\Delta_K} = 7^{2-\frac{1}{6}}$

$\Downarrow$

$0 \to \mathbb{F}_4(1) \to V \to \mathbb{F}_4 \to 0$

POITOU, ODLIZKO, SERRE.

$n = [K:\mathbb{Q}] < +\infty$ TOT. IM.

$\underbrace{C_1}_{\substack{\vee \\ 0}}^{\text{CONSTANT}} - \underbrace{C_2}_{\substack{\vee \\ 0}}^{\text{CONSTANT}} n^{-\frac{2}{3}} \leq \log(\sqrt[n]{\Delta_K})$

$3{,}108\ldots \qquad \Downarrow \qquad (\Leftarrow)\ \sqrt[n]{\Delta_K} < 22{,}37$

SI $\log(\sqrt[n]{\Delta_K}) < 3{,}108\ldots$

n DOIT ÊTRE BORNÉ.

DIAZ Y DIAZ.

TABLES MINORANT LA PACINE N-IEME DU DISCRIMINANT D'UN CORPS DE DEGRE N

TABLE 1 CAS TOTALEMENT IMAGINAIRE

N	MINORATION	N	MINORATION	N	MINORATION	N	MINORATION
2	1.72211973	102	16.55246755	202	18.43131688	302	19.27509412
4	3.25456113	104	16.61422999	204	18.45416092	304	19.28749557
6	4.55706701	106	16.67432707	206	18.47667001	306	19.29977178
8	5.65936246	108	16.73283064	208	18.49885201	308	19.31192476
10	6.60034164	110	16.78980833	210	18.52071455	310	19.32395651
12	7.41287924	112	16.84532333	212	18.54226501	312	19.33586896
14	8.12243771	114	16.89943720	214	18.56351054	314	19.34766402
16	8.74841810	116	16.95220515	216	18.58445805	316	19.35934353
18	9.30567232	118	17.00368122	218	18.60511425	318	19.37090932
20	9.80570086	120	17.05391605	220	18.62548565	320	19.38236316
22	10.25752840	122	17.10295758	222	18.64557853	322	19.39370679
24	10.66833176	124	17.15085119	224	18.66539901	324	19.40494191
26	11.04389070	126	17.19763992	226	18.68495301	326	19.41607019
28	11.38891460	128	17.24336459	228	18.70424628	328	19.42709326
30	11.70728205	130	17.28806397	230	18.72328439	330	19.43801271
32	12.00221881	132	17.33177488	232	18.74207276	332	19.44883011
34	12.27643183	134	17.37453233	234	18.76061665	334	19.45954698
36	12.53221127	136	17.41636966	236	18.77892115	336	19.47016483
38	12.77150927	138	17.45731857	238	18.79699122	338	19.48068512
40	12.99600130	140	17.49740930	240	18.81483169	340	19.49110930
42	13.20713446	142	17.53667067	242	18.83244723	342	19.50143876
44	13.40616594	144	17.57513017	244	18.84984238	344	19.51167490
46	13.59419382	146	17.61281404	246	18.86702159	346	19.52181906
48	13.77218205	148	17.64974735	248	18.88398913	348	19.53187258
50	13.94098073	150	17.68595406	250	18.90074921	350	19.54183674
52	14.10134283	152	17.72145708	252	18.91730588	352	19.55171282
54	14.25393801	154	17.75627834	254	18.93366311	354	19.56150209
56	14.39936405	156	17.79043881	256	18.94982475	356	19.57120574
58	14.53815649	158	17.82395859	258	18.96579456	358	19.58082500
60	14.67079670	160	17.85685695	260	18.98157619	360	19.59036104
62	14.79771873	162	17.88915235	262	18.99717319	362	19.59981501
64	14.91931511	164	17.92086252	264	19.01258903	364	19.60918804
66	15.03594180	166	17.95200444	266	19.02782709	366	19.61848125
68	15.14792249	168	17.98259445	268	19.04289066	368	19.62769573
70	15.25555222	170	18.01264823	270	19.05778293	370	19.63683255
72	15.35910058	172	18.04218085	272	19.07250705	372	19.64589276
74	15.45881444	174	18.07120680	274	19.08706604	374	19.65487739
76	15.55492039	176	18.09974002	276	19.10146289	376	19.66378745
78	15.64762677	178	18.12779391	278	19.11570049	378	19.67262393
80	15.73712556	180	18.15538139	280	19.12978167	380	19.68138781
82	15.82359399	182	18.18251490	282	19.14370919	382	19.69008005
84	15.90719593	184	18.20920641	284	19.15748573	384	19.69870158
86	15.98808320	186	18.23546747	286	19.17111392	386	19.70725334
88	16.06639664	188	18.26130921	288	19.18459632	388	19.71573622
90	16.14226714	190	18.28674236	290	19.19793544	390	19.72415111
92	16.21581650	192	18.31177730	292	19.21113372	392	19.73249889
94	16.28715827	194	18.33642401	294	19.22419355	394	19.74078042
96	16.35639838	196	18.36069216	296	19.23711725	396	19.74899654
98	16.42363584	198	18.38459106	298	19.24990711	398	19.75714808
100	16.48896330	200	18.40812973	300	19.26256534	400	19.76523586

3916	21.77418636
3918	21.77438954
3920	21.77459254
3922	21.77479537
3924	21.77499803
3926	21.77520052
3928	21.77540284
3930	21.77560500
3932	21.77580698
3934	21.77600879
3936	21.77621044
3938	21.77641192
3940	21.77661323
3942	21.77681437
3944	21.77701534
3946	21.77721615
3948	21.77741679
3950	21.77761726
3952	21.77781757
3954	21.77801771
3956	21.77821768
3958	21.77841749
3960	21.77861713
3962	21.77881660
3964	21.77901591
3966	21.77921506
3968	21.77941404
3970	21.77961285
3972	21.77981150
3974	21.78000999
3976	21.78020831
3978	21.78040647
3980	21.78060446
3982	21.78080229
3984	21.78099996
3986	21.78119747
3988	21.78139481
3990	21.78159199
3992	21.78178900
3994	21.78198586
3996	21.78218255
3998	21.78237908
4000	21.78257545

SI $\sqrt[n]{N_K} < 7^{1+\frac{1}{6}}$ $\quad n \leq 16$

$< 7^{1+\frac{2}{6}}$ $\quad n \leq 42$

$< 7^{1+\frac{3}{6}}$ $\quad n \leq 208$

$< 7^{1+\frac{4}{6}}$ $\quad n \leq ??$

$= 29{,}6$

<u>REMARQUE</u> SI K/$\mathbb{Q}$ EST PAS RAMIFIÉS DEHORS 7 ET TAME EN 7 $\Rightarrow \sqrt[n]{N_K} < 7$

$\Rightarrow n \leq 10.$ ∎

LEMMES FONDAMENTAUX

$\left[\ell = p = 7 \right.$

1. SOIT $V \in C_{(0,i)}$ SIMPLE $i \leq 3$
ALORS $V \simeq \mathbb{F}_7(j)$ $j \leq i$.

2. TOUTES LES EXTENSIONS DANS $C_{(0,i)}$
$$0 \to \mathbb{F}_7(i) \to V \to \mathbb{F}_7(j) \to 0.$$
SONT SCINDÉS. SAUF SI $j = 0$ ET $i = 3$.

PREUVE DE (1)

V SIMPLE $\Rightarrow$ V TUÉ PAR p.

$V' := V \oplus \mathbb{F}_p(1)$

$$\begin{tikzcd}
& K_{V'} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash, "n'"] \arrow[dd, bend left=60, dash, "n"] & \\
K_V \arrow[dr, dash] & & \mathbb{Q}(\zeta_7) \arrow[dl, dash, "\frac{2^\ell}{6 \cdot 2^\ell}"] \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

BUT MONTRER $K_{V'} = \mathbb{Q}(\zeta_7)$

SI $K_{V'}$ EST TAME ALORS $n \leq 10$

$\Downarrow$

$K_{V'} = \mathbb{Q}(\zeta_7)$

OBS.

$K_{V'}/\mathbb{Q}$ N'EST PAS TAME.

• $r = 1$ $\sqrt[n]{d_{K_{V'}}} < 7^{1+\frac{1}{6}} \Rightarrow n \leq 18$

$n = 6n'$ $\quad 1 \leq n' \leq 3 \implies K_{v'}$ EST TAME !! :)

• $r = 2$ $\quad \sqrt[\frac{1}{n}]{K_v} \leq 7^{1+\frac{2}{6}} \implies n \leq 42$

$$G \left(\begin{array}{l} K_{v'} \quad 7 \\ H' | \quad \diagdown \\ H \quad \quad Q(\mathfrak{f}_1) \\ K_v \quad \diagup \\ \diagdown \; Q \quad 6 \end{array} \right] \qquad n' = 4.$$

L'ACTION D

$H \subseteq G$

$0 \to H' \subseteq G \to \frac{G}{H'} \subseteq GL(V)$ $\qquad$ ON VEUT $H \subseteq H'$

G AGIT SIMPLEMENT SUR V.

MAIS $H \subseteq G$ EST UN ℓ-GROUPE

NORMALE. $\Longrightarrow$ H AGIT TRIVIALMENT.

$\Downarrow$

$H \subseteq A'$!!

• $n = 3$

$n \leq 208$

$$\begin{tikzcd}
& K_{v'} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash, "n'"] & \\
K_v \arrow[dr, dash] & K_{v'}^{n} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt[7]{1}) \arrow[dl, dash, "6"] \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

H

n

G

$n = 6n' \Longrightarrow n' \leq 34$

$7 \mid n' \qquad n' = 7n''$

$n'' \in \{1 \dots 4\}$

$M \subseteq H \trianglelefteq G$ 7-SYLOW.

SYLOW $\Rightarrow$ M EST UNIQUE.

M EST NORMAL DANS G.

$$[K_{v'}^{M} : \mathbb{Q}] = 6m'' \Rightarrow$$

TAME

$$6m'' \leq 10$$

$$m'' = 1$$

$n = 42$.

ON FINI COMME AVANT ■

② TOUTES LES EXTENSIONS DANS $C_{(q,n)}$

$$0 \to \mathbb{F}_q(n) \to V \to \mathbb{F}_q(j) \to 0.$$

SONT SCINDÉES. SAUF SI $j=0$ ET $n=3$.

• $n=j$ ON PEUT SUPPOSER $n=0$.

$$0 \to \mathbb{F}_q \to V \to \mathbb{F}_q \to 0 \qquad C_{(q,1)}$$

$$\updownarrow$$

$$0 \to M_0 \to M \to M_0 \to 0 \qquad MF_{(q,1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Fil}^n M = 0 \quad n > 0.$$

$\Downarrow$

$\mathrm{FIL}^{\mathrm{a}}\, M \Rightarrow M$ EST DÉT.

PAR LE FROBENIUS :

$\Downarrow$

- V N'EST PAS RAMIFIÉ EN 7.
- V N'EST PAS " DEHORS 7

V EST TRIVIAL.

<u>REMARQUE</u> :

- $G_{\mathbb{Q}_p} \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p \hookrightarrow GL_2(\mathbb{F}_p)$
  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $G_{\mathbb{Q}_p} \twoheadrightarrow G_{\mathbb{Q}_p}^{Ab} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\bullet \times \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}_p^\times \cong \mathbb{Z}_p \times \mu_p \twoheadrightarrow \mathbb{F}_7 \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $r < 5$. $\quad r = 0$.

$$(*)\quad 0 \to \mathbb{F}_7 \to V \to \mathbb{F}_7(1) \to 0.$$

- AVEC LE MF. MONTRE QUE $(*)$ EST SCINDÉ COMME $\pi_1(\mathbb{Q}_7)$-REP.

$\Rightarrow$ L'INERTIE DE $\tilde{V} = V|_{\pi_1(\mathbb{Q}(\zeta_7))}$ EST TRIVIALE $\Rightarrow 0 \to \mathbb{F}_\ell \to \tilde{V} \to \mathbb{F}_\ell \to 0$

$\Rightarrow$ EXTENSION DE $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ PAS RAMIFIÉ DE DEGRÉ 7.

& $Cl(\mathbb{Q}(\zeta_7)) = 0$, cet

extension n'existe pas.

• ~~Si~~ $r > s$. $\quad s = 0 \quad (r \leq 2)$

$$0 \to \mathbb{F}_\ell(i) \to V \to \mathbb{F}_\ell \to 0.$$

$$V' = V \oplus \mathbb{F}_\ell.$$

$$\begin{array}{c} K_{V'} \\ \big|\, 7 \\ \mathbb{Q}(\zeta_7) \\ \big|\, 6 \\ \mathbb{Q} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} r \leq 2 \\ \Downarrow \\ n \leq 42 \end{array}$$

CLAIM: $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\underbrace{N_{K_{v'}} = 7^{35+6m}}_{\Downarrow} \leq 7^{\left(1+\frac{2}{6}\right)42}$$

$$m \leq 3.$$

$$\sqrt[42]{N_{K_{v'}}} \leq 7^{\frac{53}{42}} \Rightarrow n \leq 28 \,\checkmark.$$

<u>SOUS-CLAIM</u> $\exists\, m \in \mathbb{N}$ TQ QUE.

SI π EST UNIFORMIZANT LOCAL DE $K_{v'}$ ET $\langle \sigma \rangle = G$.
$\sigma \in G$ $\quad G = \mathrm{Gal}(K_v/\mathbb{Q}_{\ldots})$

$\forall\, 1 \leq r \leq 6$

$$\pi - \sigma^r(\pi) = \pi^m u. \quad u \text{ UNITÉ } \overline{K_{v,p}}$$

$$7$$

$$N_{K_v/\mathbb{Q}} \overset{!!}{=} N_{\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}}\, N\left(N_{K_v/\mathbb{Q}(\zeta_7)}\right)$$

$$\|$$

$$7^{35} \quad 7^{6m}$$