

$$a \text{ HA } \text{PBC} \cap \quad 2$$

$$b \text{ HA } \text{PBC} - 1 \quad 1$$

$$c \text{ HA } \text{PBC} - 2 \quad 0$$

$$a^2 + xab + yz b^2 + yz bc + (x^2 yz + y^4 + z^4 + 2x^4) c^2 = 0$$

$$(1) a^2 + yz b^2 + (x^2 yz + y^4 + z^4 + 2x^4) c^2 + xab + yz ac$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1. & & \\ x & yz & \\ yz & 0 & x^2 yz + y^4 + z^4 + 2x^4 \end{array} \right) \subseteq \mathbb{P}^2 \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{array} \right)$$

$$\Delta = (x^2 z + y^3)(x^2 y + z^3)$$

$$\Sigma = \{[0:0:1], [0:1:0]\}$$

$$(B_2)$$

$$y^2 + y + 1 = 0$$

$$\subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{P}^2_{x,y,z}$$

$$(y^2 + yz) a^2 + (yz + x^2) b^2 + (z^2 + yz^2) c^2$$

$$+ (xz) ba + (yx^2 + yz) ac + xy bc = 0$$

IRRATIONALITE DES FIGURES EN COURBES COMPLEXES VIA LEUR REDUCTION EN CAR 2.

(AVEC GIUSEPPE ANCONA)

THM(AA) LES VARIÉTÉS PROJECTIVES LISSES
DÉFINIES PAR

$$\langle \beta_1=0 \rangle \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \left(\begin{matrix} 0 & 0 & (-1) & 0 & 0 & (-2) \\ & a & b & c & & \end{matrix} \right)$$

$$\langle \beta_2=0 \rangle \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

NE SONT PAS RATIONNELS

STRATÉGIE :

① RENDRE MANU 2.

② UTILISER LE COMPORTEMENT ~~PROPRE~~ DES
FIGURES EN COURBES EN CAR 2 POUR OBSERVER
LA RATIONALITÉ

1§. RATIONALITÉ.

$X \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ VARIÉTÉ PROJECTIVE LISSE.

• THM DE LA FONCTION IMPLICITE:

$\forall x \in X \quad \exists x \in U \subseteq X \quad \exists V \subseteq \mathbb{P}^n \quad U \cong V \subseteq \mathbb{C}^n$

$\uparrow$ OUVERT POUR LA TOPOLOGIE ANALYTIQUE. $\uparrow$ HOMOMORPHISME $\uparrow$ DISQUE.

QUAND ON PEUT LE FAIRE ALGÈBREMMENT?

DEF X EST RATIONNELLE SI $\exists U \subseteq X, V \subseteq \mathbb{P}^n \mid$
 $U \cong V$ (ALGÈBREMMENT)

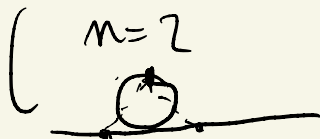
OUVERT POUR LA TOPOLOGIE DE ZARISKI.

EX $X \subseteq \mathbb{P}^n$ HYPERSURFACE. $d := \deg(X)$

$d = 1 \quad X \cong \mathbb{P}^{n-1}$

$d = 2 \quad p \in X, H \ncong p$

$\pi : X \dashrightarrow H$ PROJECTION DE p À H .
 EST BIEN DÉFINIE



$(m=3, d=3, \text{SVD or QR}, \text{MAT(ortho)}, n=4, d=3, \text{MAT(ortho)}, \text{columns (transpose)})$
 $m=5, n=7$

1. $d \geq n+1$ $\times$ PAS NACHGEW. $\left\{ \begin{matrix} m=9 \\ d=9 \end{matrix} \right.$ KATZANKAU, KONTSEVICH, PANTOU, KUBIKI, 2005, TROTSCHEN

(HABERS $\Rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0 \quad \forall d \geq 0$)

$\square$ $m \geq k$ $\times$ TROTSCHEN PAS NACHGEW.

$n=2$ $2 \mid 1$ $7=2 \cdot 3 + 1$ $d \geq 2 \mid \frac{n+1}{2}$ $\left\{ \text{TONKIN (2016)} \right\}$ $(n \geq 2)$
 $n=3$ $2 \mid 2$ $7=4$ $d \geq \log_2(n-1) + 2 \mid \text{SCANNON (2016)}$ $(n \geq 4)$
 $n=4$ $2 \mid 2$ $7=4$
 BAZO GIL DISTORNIERUNG DO DISORNIERUNG, DISCOMPOSURE
 DO ANOMALIE, VASIN 2015 (+ CALLIGR-THOLENT 2016)

$\boxed{A} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{Z}$

(7) WILDA FIBRES EN QUINQUEZ
EN CATE

2. FIBRÉS EN CONIQUES

k CARRES ALGÈBRIQUEMENT CLQS. (E.G. $k = \mathbb{A}^1$, $k = \overline{\mathbb{F}_2}$)

CONIQUES SUR k $C \subseteq \mathbb{P}_k^2$ | $\dim(C) = 2$

CLASSIFICATION: - C LISSE ($a^2 + bc = a$) $\bigcirc$
 - C CROIX ($ab = a$) $\times$
 - C DROITE DOUBLE ($a^2 = a$) $\equiv$

X_B k -VARIÉTÉ, B LISSE.

DEF $f: X \rightarrow B$ EST UN FIBRÉ EN CONIQUES SI

$\forall b \in B$ $X_b \simeq \text{CONIQUE}$.

LOCALEMENT X DÉFINIE PAR

$$D_{aa}a^2 + D_{bb}b^2 + D_{cc}c^2 + D_{ab}ab + D_{ac}ac + D_{bc}bc = 0$$

$\cap$
 $B \times \mathbb{P}^2$

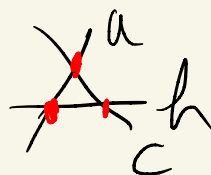
$D_{i,j}$ FONCTION SUR B

$$\text{Ex 1) } 0 = x a^2 + y b^2 + z c^2 \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$$

X lisse.

$\downarrow$
 $\mathbb{P}^2 \times b, z$

$$\Delta = \begin{cases} 4xyz = 0, R = \emptyset \\ X \text{ s.t. } |\text{rank}| = 2 \end{cases}$$



conservation
1/3 (1/5)

$$(2) (B_1, P_2) = 0$$

$\downarrow$
 $\mathbb{P}^2 \times b, z$

$$\Delta = \begin{cases} \text{so } X \in \mathbb{P}^2 \times b, z \\ \text{sur } X \end{cases}$$

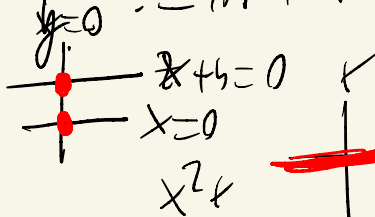
$\Sigma = \emptyset$

$$(x^2 y + z^3)(x^2 z + y^3) \text{ s.t. } |\text{rank}| = 2$$



$$(3) a^2 + x b^2 + y c^2 + x a b \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^2$$

$X \in (1-x)$



$$a^2 + 4b^2 - 4ab = (a - 2b)^2$$



DEF $X \rightarrow B$ FIBRÉ EN CUBES.

Δ , DISCRIMINANT $\Delta \subseteq B$ CUBES NON SINGULIERS.
SIMULIERS. $\Delta = \{b \in B \mid X_b \text{ SINGULIER}\}$.
LEMME:

$$\Delta = b_{aa} b_{bb} b_{cc} + b_{ab} b_{bc} b_{ac} \\ + b_{ab}^2 b_{cc} + b_{ac}^2 b_{bb} + b_{ac}^2 b_{aa}$$

$$\hookrightarrow |\text{CAR}(k)| = 2$$

DEF $\underline{\varepsilon} \subseteq \Delta$ CUBES NON SINGULIERS.

$$\{x \in \Delta \mid X_x \text{ EST NON SINGULIER}\}$$

si $\underline{\varepsilon} = \emptyset$ CUBES !

$$\text{si } k = \overline{\mathbb{F}_2} \Delta : \{b_{ab} = b_{bc} = b_{ac} = 0\}$$

3\$. CRITÈRE D'ARIN-MUMFORD

THM (ARIN-MUMFORD, '72)

X, B PROSCAUS Lisse. / Δ

$X \rightarrow B$ FIBRÉ EN COURBES TEL QUE

① Δ EST DISCONNECTÉ.

② $\exists$ COMPOSANTES CONNEXES Δ_1, Δ_2 LISSO NS Δ TELS QUE $\forall b \in \Delta_i$ X_b EST CROIX ET

$X_{\Delta_i} \rightarrow \Delta_i$ N'EST PAS UN PRODUIT ($X_{\Delta_i} \neq X_b \times \Delta_i$)

③ $H^3(B, \mathbb{Z}/\mathbb{Z}) = 0$

ALORS

X N'EST PAS RATIONNEL.

THM 2 (AA)

X, θ PROSCUR Lisse SUR $\overline{\mathbb{F}_2}$

$X \rightarrow B$ FIAN EN COURVE. GÉNÉRIQUEMENT Lisse
TOUT PUIS.

① Δ DISCONNECTÉ.

② $\exists$ COMPOSANTS CONNEXE $D_1, D_2, \dots, D_r$ ET $p_i \in D_i$ |
 X_{p_i} EST UNE DROITE DOUBLE.

③ $H^2(B, \mathbb{Z}^1) = 0$

ALORS X N'EST PAS RATIONNEL.

LMQ DANS LA PRATIQUE.

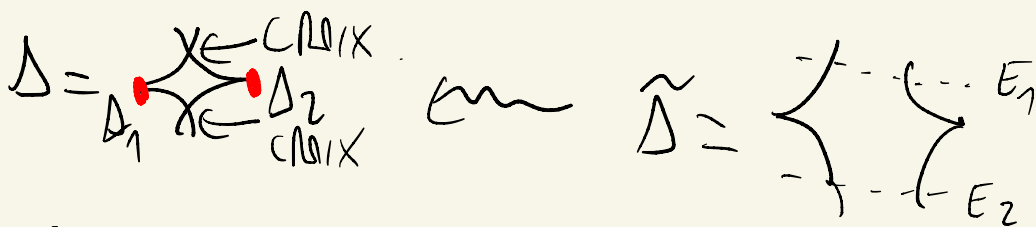
- ② EST DIFFICILE À VÉRIFIER CAR
EST PROPOSÉ GLORIOS SUR $X_{D_i} \rightarrow \Delta_i$

- ②' EST IMMÉDIAT À VÉRIFIER:
HYPOTHÈSE PUNCTUELLE.

- $\Delta \subseteq \mathbb{P}^m$ EST HYPER SURFACE, JAMAIS DISCONNECTÉ MAIS

LEMME SUPPOSONS $\Delta = D_1 \cup D_2$ ET

QUE X_p EST CROIX $\forall p \in D_1 \cap D_2$
 ALORS IL $\exists$ UN MOIÈRE BIRATIONNELLE $X \rightarrow \tilde{\theta}$ M
 QUS. $\tilde{\Delta}$ EST DISCONNECTÉ. ($\tilde{\theta} = \theta|_{\Delta \cap D_2}$, $\tilde{\Delta} = D_1 \cup \tilde{D}_2$)
EX (B_1) OU (D_2) SUR $\overline{IF_2}$



D_1 PAS BIRATIONNELLE SUR $\overline{IF_2}$

$\Downarrow$ DÉCOMPOSITION DE LA NORMALISÉE

B_1 PAS BIRATIONNELLE SUR $\mathbb{C}$

3. IDEE IS A PROVE. DURING THM(A.M)

THM(A. VALU, 123) $\times$ Lisse PROPR / IF₂ $\dim(X)=d$

SI $H^{2d-2}_{\text{crys}}(X)(2) \neq 0$ $\xrightarrow{\text{2/2-MANUEL}} \text{ATOMS} \times \text{PAR MANUEL}$

(THM(A. VALU, 172) $\times$ Lisse PROPR SUR $\mathbb{C}$)
 SI $H^{2d-2}_{\text{sym}}(X)(2) \neq 0$ $\xrightarrow{\text{2/2-MANUEL}} \text{ATOMS} \times \text{PAR MANUEL}$
 $H^3(X, \mathbb{Z})(2) \neq 0$

$$x_{p_1} = \frac{1}{p}$$

$\mathcal{C}: \{ \text{crys} \} \rightarrow H^{2d-2}(X)$ $x_{p_2} = \frac{1}{p}$

$\mathcal{C}(l_1) - \mathcal{C}(l_2) \in H^{2d-2}(X)$ $x_{p_1} = \frac{1}{p}$
 $l_p^m = 1$

$$2d(l_1) - 2d(l_2)$$

$$\mathcal{C}(x_{p_1}) - \mathcal{C}(x_{p_2}) = 0$$

DOUX FIBRES OUT
 LAMOTHE CLASSO.

$$\bigcirc \begin{matrix} a^2 + bz b^2 + (x^2 bz + r^4 + z^4 + 2x^4) c^2 + xub + rzac \\ \downarrow 1 \\ \downarrow 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \pi^*(b(2) \otimes \pi^*(b(-2))) \\ \downarrow 1 \end{matrix} \quad \bigcup \quad \begin{matrix} a^2 \\ \downarrow \\ b \otimes b(-1) \oplus b(-2) \end{matrix}$$

b

$$b(2) \otimes \pi^*$$

Therefore all seen
of $Q(2)$

$$H^0(P(\mathbb{A}^1), \mathcal{O}(-2))$$

$$\mathbb{A}^1 \rightarrow L_1$$

$$L_1^{-1} \otimes \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{P^n}$$

$$H^0(P^2, \pi_* \mathcal{O}_{P(\mathbb{A}^1)}(2)) = H^0(\mathbb{A}^2, \mathcal{O}(\mathbb{A}^1))$$

$$\mathcal{O}_{P^n} \rightarrow L_1 \otimes \mathbb{A}^1$$

$b \in$

$$H^0(\mathbb{A}^2 \otimes L_1^{-1}) \Rightarrow H^0(\pi_* \mathcal{O}_{P(\mathbb{A}^1)} \otimes L_1)$$

$$Q(2)$$

$$\pi^*(b(2) \otimes b_v(2) \otimes b(-2))$$

$$H^0(\pi_* \pi^*(\mathcal{O}_{P^n}(-1) \otimes \mathcal{O}_{P^n}(-1)))$$

$$a \in H^0(\mathcal{O}_v(1)) = H^0(\mathcal{O}_v$$

$$b \in \pi_*(\mathcal{O}_{P(\mathbb{A}^1)}(1) \otimes \mathcal{O}(-1)) = (\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(+1) \oplus \mathcal{O}(+2)) \oplus \mathcal{O}(-1)$$